Successione di Collatz personalizzata: analisi del residuo e unicità del ciclo banale

ARDITO Nicola

n.ardito52@gmail.com oppure n _ardito@alice.it

BARI – ITALIA

17 Novembre 2025

Abstract

In questo lavoro si analizza la successione di Collatz nella formulazione personalizzata da me proposta negli articoli precedenti e viene introdotto il concetto di **residuo** (Res), definito come rapporto tra i fattori di riduzione e di espansione in ciascuna iterazione composta. Si dimostra che per ogni numero intero dispari N, il valore di Res rimane sempre vicino a 1 e compreso tra 0.9 e 1.25. Ne consegue che non esistono altri cicli banali, ad eccezione del ciclo $1 \to 4 \to 2 \to 1$.

1. Introduzione

In questo sesto articolo viene ripresentata la successione personalizzata equivalente alla successione canonica di Collatz perché conduce agli stessi risultati finali. In seguito con il termine di successione si indicherà la successione personalizzata e con il termine di iterazione della medesima si indicherà una **iterazione composta da un certo numero di iterazioni semplici del tipo**:

- Passaggi dispari (applicazione di $3N + 1$)
- Passaggi pari (divisione per 2)

dipendenti dal numero iniziale della stessa iterazione.
Collegandomi ai miei lavori precedenti in cui si dimostra la veridicità della congettura, in questo articolo si introduce il concetto di **residuo** (Res) con cui si dimostra che nella successione di Collatz da me personalizzata e in quella canonica non esistono altri cicli banali oltre al ciclo $1 \to 4 \to 2 \to 1$.

2. Definizione di residuo

Per ogni iterazione composta della successione che porta $N \to N'$con:

- a: numero di passaggi dispari (applicazioni di $3n + 1$),
- b: numero di passaggi pari (divisioni per 2),

si definisce residuo l'espressione:

$$\text{Res} = \frac{2^b \cdot N'}{3^a \cdot N}$$

che rappresenta il fattore di correzione della somma dei +1 nei passaggi dispari, da cui si ha

$$N' = \frac{3^a \cdot N \cdot Res}{2^b}$$

3. I quattro casi della successione personalizzata

I numeri sia iniziali N che finali N' in ogni iterazione della successione sono tutti dispari del tipo ≡ 1 mod. 4 oppure ≡ 3 mod. 4 (dopo un eventuale numero iniziale della successione che può essere anche pari mod. 4) quindi ogni iterazione si riduce a questi casi in cui si calcola anche il valore di Res:

1. **Caso 1:**

$$N = 4(1 + 2k) + 1 \Rightarrow N' = 1 + 2k$$

$$a = 0, b = 2$$

$$\text{Res} = \frac{4(1 + 2k)}{4(1 + 2k) + 1} = 1 - \frac{1}{8k + 5}.$$

Valore < 1, tende a 1 per $k \to \infty$.

2. **Caso 2:**

$$N = 8k + 1 \Rightarrow N' = 6k + 1$$

$$a = 1, b = 2$$

$$\text{Res} = \frac{4(6k + 1)}{3(8k + 1)} = 1 + \frac{1}{24k + 3}.$$

Valore > 1, tende a 1 per $k \to \infty$.

3. **Caso 3 (p=2 e con k pari):**

$$N = 2^2(1 + 2k) - 1 \Rightarrow N' = \frac{3(1 + 2k) - 1}{2}$$

$$a = 1, b = 3$$

$$\text{Res} = 1 - \frac{1}{24k + 9}.$$

Valore < 1, tende a 1 per k pari e $k \to \infty$.

4. **Caso 3 (p ≥3 e con k stessa parità di p):**

$$N = 2^{\text{p}}(1 + 2k) - 1 \Rightarrow N' = [3^{p-1}(1 + 2k) - 1]/2$$

$$a = \text{p} - 1, b = \text{p} + 1$$

$$\text{Res} = \frac{2^{p+1}3^{p-1}k + 2^p(3^{p-1} - 1)}{2^{p+1}3^{p-1}k + 3^{p-1}(2^p - 1)} = 1 + \frac{3^{p-1} - 2^p}{2^{p+1}3^{p-1}k + 3^{p-1}(2^p - 1)}.$$

Valore > 1, tende a 1 per $k \to \infty$ con k avente la stessa parità di p.

5. **Caso 4 (p ≥2 e k parità diversa da p):**

$$N = 2^{\text{p}}(1 + 2k) - 1 \Rightarrow N' = [3^p(1 + 2k) - 1]/2$$

$$a = \text{p}, b = \text{p} + 1$$

$$\text{Res} = \frac{2^{p+1}3^p k + 2^p(3^p - 1)}{2^{p+1}3^p k + 3^p(2^p - 1)} = 1 + \frac{3^p - 2^p}{2^{p+1}3^p k + 3^p(2^p - 1)}.$$

Valore > 1, tende a 1 per $k \to \infty$ con k avente diversa parità di p.

4. Ricerca del ciclo banale sotto i quattro casi precedenti

Mostriamo che, imponendo N′=N in ciascun caso precedente, l'unica soluzione è N=1. Infatti:

- Caso 1:
  - Equazioni: N=4(1+2k)+1, N′=1+2k. Imporre N′=N darebbe 1+2k = 4(1+2k)+1 ⇒ 1+2k = 5+8k ⇒ 6k = −4 ⇒ k = −2/3, non intero. Quindi nessun punto fisso.
- Caso 2:
  - Equazioni: N=8k+1, N′=6k+1. Imporre N′=N dà 8k+1 = 6k+1 ⇒ 2k = 0 ⇒ k=0 ⇒ N=1, N′=1. **Questo è il punto fisso (e coincide col ciclo banale 1→4→2→1) con a=1 e b=2 ed Res = 4/3.**
- Caso 3 (p≥2, stessa parità di k):
  - Equazioni: N=2^p(1+2k)−1, N′ = [3^{p−1}(1+2k)−1]/2.

- Imporre N′=N porta 2·(2^p(1+2k)−1) = 3^{p−1}(1+2k)−1, quindi (1+2k)·(3^{p−1} − 2^{p+1}) = −1.
- Il fattore (1+2k) è un intero positivo; il fattore (3^{p−1} − 2^{p+1}) è un intero. Per p=2 è 3−8=−5, che non può dare −1 se moltiplicato per un intero ≥1. Per p≥3, 3^{p−1} − 2^{p+1} ≤ −1 o ≫ 0, ma in ogni caso non consente il prodotto esattamente −1 con (1+2k)≥1. Quindi nessuna soluzione.

- Caso 4 (p≥2, parità diversa di k):
  - Equazioni: N=2^p(1+2k)−1, N′ = [3^{p}(1+2k)−1]/2.
  - Imporre N′=N porta 2·(2^p(1+2k)−1) = 3^{p}(1+2k)−1, quindi (1+2k)·(3^{p} − 2^{p+1}) = −1.
  - Con (1+2k)≥1, il prodotto non può essere −1. Quindi nessuna soluzione.

Conclusione: quindi all'interno di ciascuna iterazione della successione personalizzata l'unico caso che ammette N′=N è il Caso 2 con k=0, cioè N=1.

Se vi è un ulteriore ciclo N-->N' con N'=N diverso da quello banale deve venire fuori da un gruppo di iterazioni composte successive.

5. Proprietà moltiplicativa, vicinanza a 1 e crescita di b rispetto ad a

Consideriamo due iterazioni composte consecutive: la prima porta $N \to N'$con a_1 passi dispari e b_1 pari; la seconda porta $N' \to N''$con a_2 passi dispari e b_2 pari. Per definizione

$$\mathrm{Res}_1 = \frac{2^{b_1} N'}{3^{a_1} N}, \mathrm{Res}_2 = \frac{2^{b_2} N''}{3^{a_2} N'}.$$

Allora

$\mathrm{Res}_1 \cdot \mathrm{Res}_2 = \frac{2^{b_1+b_2} N''}{3^{a_1+a_2} N} = \mathrm{Res}_{12}$ per il blocco $N \to N''$,

cioè il prodotto dei Res di blocchi consecutivi è il Res del blocco aggregato e vale identicamente per qualunque concatenazione di blocchi.
Per una concatenazione di iterazioni:

$$\mathrm{Res}_{\mathrm{tot}} = \prod_i \mathrm{Res}_i.$$

Se ciascuna $\mathrm{Res}_i = 1 \mp \varepsilon_i$ con $|\ \varepsilon_i\ |$ piccolo (dell'ordine $\frac{1}{k_i}$), allora

$$\log\ \mathrm{Res}_{\mathrm{tot}} = \sum_i \log\,(1+\varepsilon_i) \approx \sum_i \varepsilon_i,$$

per cui la somma di correzioni piccole mantiene $\mathrm{Res}_{\mathrm{tot}}$ vicino a 1, compatibilmente con il fatto che la successione alterna casi con $\mathrm{Res} < 1$ e $\mathrm{Res} > 1$.
Inoltre nella successione ogni blocco assegna conteggi a, b tali che:

- Caso 1: $a = 0, b = 2 \Rightarrow b = a + 2$.
- Caso 2: $a = 1, b = 2 \Rightarrow b = a + 1$.
- Caso 3: $a = p - 1, b = p + 1 \Rightarrow b = a + 2$.
- Caso 4: $a = p, b = p + 1 \Rightarrow b = a + 1$.

In tutti i casi, $b \geq a + 1$. Aggregando blocchi lungo la traiettoria, si ottiene sistematicamente $\sum b > \sum a \Rightarrow \sum b - \sum a \geq numero\ di\ iterazioni.$ Questo è il cuore della tendenza alla contrazione nel senso 2-adico (più divisioni per 2 che espansioni per 3).

6. Esempio numerico su N=27.

Successione di Collatz personalizzata usando numeri solo dispari N≡1 mod.4 e N≡3 mod.4

Res per ogni iterazione	Res rispetto ad N iniziale	Caso della successione personalizzata	Iterazioni	step =Dispari + Pari	N	periodicità p oppure numeri pari e dispari	Valore di 1+2*k	Valore di k	step dispari	step pari	Tipo di N e sua trasformazione
			0		27						
1,02057613169	1,02057613169	Caso 4 con p>=2	1	5	31	2	7	3	2	3	4*h0+3-->3*h1+1
1,02801008894	1,04916255991	Caso 4 con p>=2	2	16	121	5	1	0	7	9	4*h0+3-->3*h1+1
1,00275482094	1,05205281489	Caso 2	3	19	91	1d2p			8	11	4*h0+1-->3*h0+1
1,00610500611	1,05847560375	Caso 4 con p>=2	4	24	103	2	23	11	10	14	4*h0+3-->3*h1+1
1,00683207479	1,06570718824	Caso 4 con p>=2	5	31	175	3	13	6	13	18	4*h0+3-->3*h1+1
1,00458553792	1,07059402897	Caso 4 con p>=2	6	40	445	4	11	5	17	23	4*h0+3-->3*h1+1
0,99775280899	1,06818819969	Caso 1	7	42	111	0d2p			17	25	4*h0+1-->h0
1,00722945167	1,07591061466	Caso 4 con p>=2	8	51	283	4	7	3	21	30	4*h0+3-->3*h1+1
1,00196309384	1,07802272815	Caso 4 con p>=2	9	56	319	2	71	35	23	33	4*h0+3-->3*h1+1
1,00230917089	1,08051206685	Caso 3 con p>=3	10	68	607	6	5	2	28	40	4*h0+3-->h1
1,00099660341	1,08158890887	Caso 3 con p>=3	11	78	769	5	19	9	32	46	4*h0+3-->h1
1,00043346337	1,08205773804	Caso 2	12	81	577	1d2p			33	48	4*h0+1-->3*h0+1
1,00057770075	1,08268284361	Caso 2	13	84	433	1d2p			34	50	4*h0+1-->3*h0+1
1,00076982294	1,08351631770	Caso 2	14	87	325	1d2p			35	52	4*h0+1-->3*h0+1
0,99692307692	1,08018242134	Caso 1	15	89	81	0d2p			35	54	4*h0+1-->h0
1,00411522634	1,08462761649	Caso 2	16	92	61	1d2p			36	56	4*h0+1-->3*h0+1
0,98360655738	1,06684683589	Caso 1	17	94	15	0d2p			36	58	4*h0+1-->h0
1,02716049383	1,09582292279	Caso 3 con p>=3	18	102	13	4	1	0	39	63	4*h0+3-->h1
0,92307692308	1,01152885181	Caso 1	19	104	3	0d2p			39	65	4*h0+1-->h0
1,18518518519	1,19884900955	caso N=3	20	111	1				41	70	caso N=3

Nelle prime due colonne della tabella precedente si evidenzia come il valore del Res soddisfa la proprietà moltiplicativa e la vicinanza a 1. Si nota anche che il massimo Res si raggiunge quando N converge ad 1 poiché N'=1 ed a=41 e b=70 sono i massimi valori dei passaggi dispari e pari per cui Res = (2^70*1)/(3^41*27) = 1,198849. Inoltre si nota nelle colonne 10 ed 11 la crescita di b rispetto ad a.

7. Impossibilità di cicli non banali

Se esistesse un ciclo $N \to N' = N$ con $N \neq 1$ con N e N' termini della successione inclusi in iterazioni composte una dopo l'altra non necessariamente successive, si avrebbe:

$$\mathrm{Res}_{\mathrm{ciclo}} = \frac{2^{\sum b}}{3^{\sum a}} = 1.$$

Ma:

1. $2^{\sum b} = 3^{\sum a}$ è impossibile perché 2 e 3 sono primi distinti.
2. Inoltre, $\sum b > \sum a \Rightarrow \sum b - \sum a \geq numero\ di\ iterazioni$ implica $\mathrm{Res}_{\mathrm{ciclo}} > 1$.

3. I calcoli mostrano che Res è sempre vicino a 1 ma mai uguale a 1.

Contraddizione, quindi l'unico ciclo è quello banale:

$$1 \to 4 \to 2 \to 1.$$

8. Conclusione

La successione personalizzata usata nei miei lavori conferma i risultati della successione canonica di Collatz:

- Ogni numero intero positivo converge a 1.
- L'unico ciclo possibile è quello banale $1 \to 4 \to 2 \to 1$ sull'impossibilità di avere un Res=1.
- La differenza b-a aumenta sempre in ogni iterazione.

9. Riferimenti

- Ardito Nicola — *La congettura di Collatz da un punto di vista elementare*. La congettura di Collatz dal punto di vista elementare
- Ardito Nicola — *Successione di Collatz Personalizzata, Riduzione Modulare, Orbite Isopath e Analisi dei Passaggi Pari e Dispari*.
- Ardito Nicola — *Dalla successione di Collatz Personalizzata si deduce la veridicità della stessa*.
- Ardito Nicola — *Una proposta di convergenza per la successione di Collatz: la Congettura personalizzata*
- Ardito Nicola — *Una proposta di convergenza per la successione di Collatz: la dimostrazione geometrica della Congettura personalizzata*
- Eric Roosendaal, On The 3x + 1 Problem